

Anexo I

Propuesta de estudio
Diseño de mallas adaptativas aplicando equidistribución
Registro CGPI: 20040014

Director del proyecto: M. C. Juan José Tapia Armenta

MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

Por: Fernando Cervantes Leyva
Becario PIFI

Versión del documento 1.0

Abril 2005

<http://www.citedi.mx/~jjtapia/pagina/proyectos.htm>

1. Resumen

Se desarrolló un conjunto de formulas de diferencias finitas y se creó una tabla que asiste en la construcción de la matriz de diferenciación del método de diferencias finitas.

2. Introducción

Las ecuaciones diferenciales han sido utilizadas extensamente para modelar una gran variedad de problemas en mecánica de sólidos y fluidos, biología, ciencia de materiales, economía, ecología, ciencias computacionales, etc. Por ejemplo, las ecuaciones de Navier Stokes en dinámica de fluidos, las ecuaciones de Maxwell para electromagnetismo.

Desafortunadamente, aunque las ecuaciones diferenciales pueden describir una gran cantidad de estos problemas, solo una pequeña parte de ellos pueden ser solucionados de manera exacta en términos de funciones elementales (polinomios, seno, coseno, logaritmos, etc.) y sus combinaciones (funciones compuestas). Frecuentemente, aun cuando una ecuación diferencial puede ser resuelta analíticamente, se requiere para esto grandes esfuerzos y utilización de teorías matemáticas avanzadas. La forma cerrada de la solución puede ser muy complicada para ser realmente útil.

Si la solución analítica no está disponible, se desea encontrar una solución aproximada a la ecuación diferencial. Esto se logra utilizando métodos numéricos.

Este documento muestra como resolver numéricamente ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE) y parciales (PDE), utilizando el método de diferencias finitas (FDM).

3. Método de Diferencias Finitas

El método de diferencias finitas está basado en aproximaciones que permiten reemplazar ecuaciones diferenciales por ecuaciones de diferencia.

Estas aproximaciones de diferencia finita son de forma algebraica; relacionan el valor de la variable dependiente, en un punto dentro de la región de solución, con sus valores en algunos puntos vecinos. En base a esto, la solución por diferencia finita básicamente involucra 3 pasos:

- (1) Discretización.
- (2) Aproximación de la Ecuación Diferencial.
- (3) Solución de las Ecuaciones de Diferencia.

3.1. Discretización (Paso 1)

Debido a que los cálculos para la solución de las ecuaciones diferenciales son realizados con la ayuda de una computadora, es necesario discretizar la región de solución en un número finito de $n + 1$ puntos.

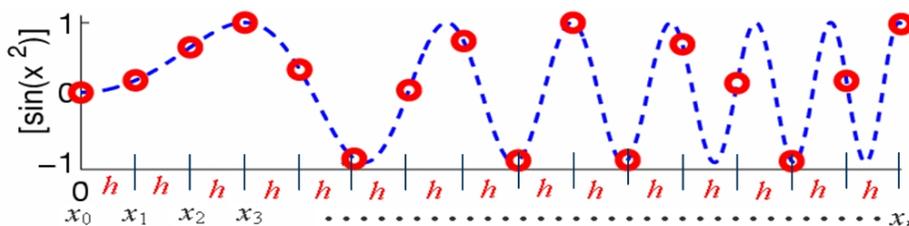


Figura 1: Discretización de tipo malla uniforme.

Tal como se muestra en la Fig.(1), para el método de diferencias finitas, los $n + 1$ puntos están distribuidos con una distancia uniforme h . Esta discretización es conocida como malla uniforme.

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{1}{n} \quad (1)$$

En cada punto de la malla se encuentra su respectiva aproximación de la solución de la ecuación diferencial.

3.2. Aproximación de la Ecuación Diferencial (Paso 2)

Se aproxima la ecuación diferencial dada por su equivalente ecuación de diferencia, lo cual significa que en lugar de resolver una ecuación diferencial para todo el problema, se tiene una ecuación de diferencia para cada punto de la malla.

3.2.1. Deducción de fórmulas de diferencias finitas

Las fórmulas de diferencias finitas pueden ser deducidas geoméricamente o usando series de Taylor. La derivada en un punto está dada por

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}, \quad (2)$$

si se asume que h es pequeña, da como resultado que

$$F'(x) \approx \frac{F(x+h) - F(x)}{h}, \quad (3)$$

esta fórmula es una aproximación a la primera derivada. Es importante notar que la Ec.(3) establece que ambas partes son "casi" iguales, lo que implica que existe un error.

$$F'(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} + error. \quad (4)$$

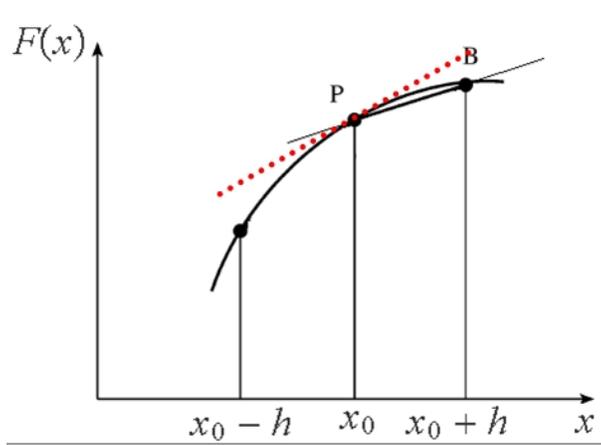


Figura 2: Comparación entre la derivada analítica (recta punteada) y la derivada aproximada por diferencia hacia adelante \overline{PB} (recta continua).

A la Ec.(4) se le conoce como *diferencia hacia adelante* para la primera derivada.

Geoméricamente, como se observa en la Fig.(2), esta formula representa la pendiente de la línea secante que conecta los dos puntos $(x, F(x))$ y $(x + h, F(x + h))$.

Este método para obtener las aproximaciones de diferencia finita es intuitivo, un método más general es la utilización de la Serie de Taylor.

3.2.2. Aplicación de la Serie de Taylor.

La serie de Taylor es la herramienta más importante en el análisis del método de diferencias finitas. Esta puede escribirse de la siguiente forma:

$$F(x + h) = F(x) + hF'(x) + \frac{1}{2!} (h)^2 F''(x) + \frac{1}{3!} (h)^3 F'''(x) + \dots \quad (5)$$

Para obtener la primera derivada se despeja $F'(x)$,

$$F'(x) = \frac{F(x + h) - \left[F(x) + \frac{1}{2!} (h)^2 F''(x) + \frac{1}{3!} (h)^3 F'''(x) + \dots \right]}{h} \quad (6)$$

reordenando,

$$F'(x) = \frac{F(x + h) - F(x)}{h} - \left(\frac{1}{2!} (h) F''(x) + \frac{1}{3!} (h)^2 F'''(x) + \dots \right) \quad (7)$$

finalmente, se trunca la serie, dando como resultado una formula que contiene un error cuyo orden es el del valor mayor de h^n de la parte no tomada en cuenta

$$F'(x) = \frac{F(x + h) - F(x)}{h} + O(h) \quad (8)$$

La Ec.(8) corresponde a la formula de diferencia hacia adelante para la primera derivada con orden de error $O(h^1)$, lo que en este caso, significa que el error de la aproximación es proporcional al tamaño del incremento h (ver Fig.(2)). Se lee como "error de orden h^n ". Es importante recordar que h es un valor pequeño (menor a 1), por lo que para $n_1 < n_2$, $h^{n_1} >> h^{n_2}$, de ahí que el orden del error obedezca solo al término más significativo.

Por otro lado, al tomar el incremento h hacia atrás en la serie de Taylor se obtiene,

$$F(x - h) = F(x) - hF'(x) + \frac{1}{2!} (h)^2 F''(x) - \frac{1}{3!} (h)^3 F'''(x) + \dots \quad (9)$$

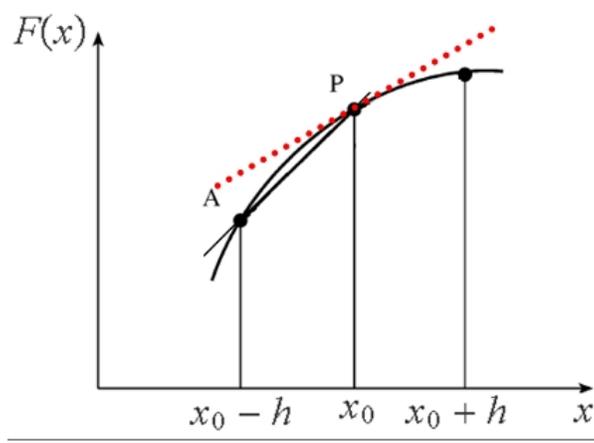


Figura 3: Comparación entre la derivada analítica (recta punteada) y la derivada aproximada por diferencia hacia atrás \overline{AP} (recta continua).

despejando $F'(x)$,

$$-hF'(x) = F(x-h) - \left[F(x) + \frac{1}{2!}(h)^2 F''(x) - \frac{1}{3!}(h)^3 F'''(x) + \dots \right] \quad (10)$$

al reagrupar,

$$F'(x) = \frac{F(x) - F(x-h)}{h} + \left(\frac{1}{2!}(h) F''(x) - \frac{1}{3!}(h)^2 F'''(x) + \dots \right) \quad (11)$$

finalmente, se obtiene la formula de diferencia hacia atrás para la primera derivada con orden de error h ,

$$F'(x) = \frac{F(x) - F(x-h)}{h} + O(h) \quad (12)$$

la cual se representa en la Fig. (3).

Sumando las series de Taylor hacia adelante y hacia atrás la aproximación a la primera derivada por diferencia centrada es

$$F'(x) = \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} + O(h^2), \quad (13)$$

cuya representación se muestra en la Fig.(4).

Al comparar las formulas para la primera derivada de diferencia hacia delante (Ec.(8)), hacia atrás(Ec.(12)), y centrada (Ec.(13)), se aprecia que cada una de ellas requiere la misma cantidad de puntos de la malla para aproximar la derivada en un punto (en este caso dos puntos), la diferencia consiste en que la formula de diferencia centrada tiene un error de $O(h^2)$ mientras que las de diferencia hacia adelante y hacia atrás tienen un error de $O(h)$.

$$O(h^2) < O(h).$$

Esto se aprecia en la Fig.(5), donde la línea que representa la solución para la diferencia centrada (\overline{AB}), es más cercana al resultado real que las líneas que representan el resultado a partir de las otras opciones (\overline{AP} , y \overline{PB}).

De lo anterior, se puede concluir que la exactitud de la aproximación puede incrementarse básicamente de 2 formas:

(1) **Incrementando el número de puntos tomados en la construcción de la formula.** Se obtiene una formula que involucre un mayor numero de puntos de la malla y con esto incremente su exactitud. Esto se logra al desarrollar y combinar cierto numero de series de Taylor tomando en cuenta un numero mayor de puntos, por ejemplo $F(x+2h)$, $F(x+3h)$, etc.

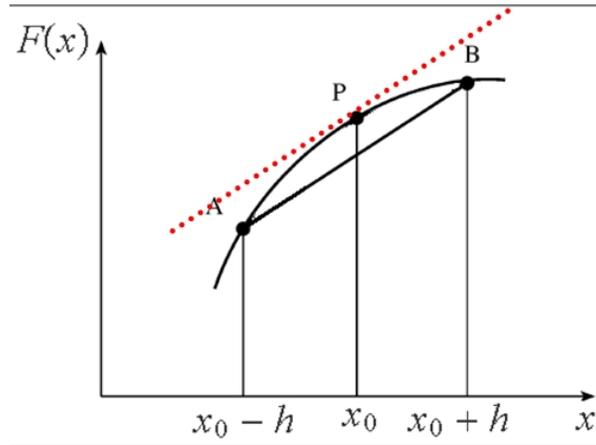


Figura 4: Comparación entre la derivada analítica (recta punteada) y la derivada aproximada por diferencia centrada \overline{AB} (recta continua inferior).

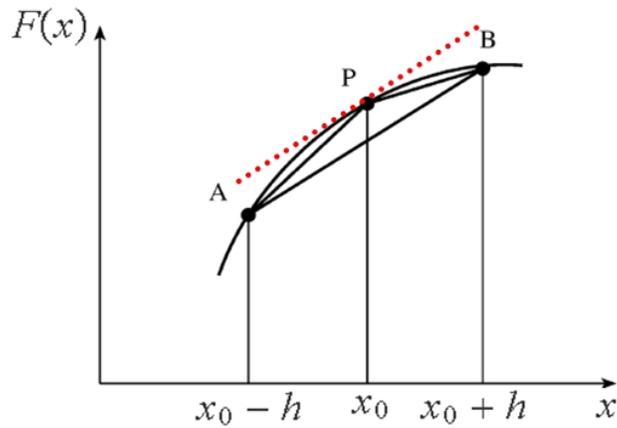


Figura 5: Comparación entre la derivada analítica (recta punteada) y las derivadas aproximadas (rectas \overline{PB} , \overline{AP} , y \overline{AB}).

(2) **Incrementando el número de puntos en la malla.** Dada una formula para cualquiera de las aproximaciones, entre mayor sea el numero de puntos en la malla, menor será el valor del error.

Entre mayor sea el número de puntos que utilice una ecuación para aproximar la solución, y en los que esté discretizada la región de solución, mayor será el trabajo computacional requerido. Por esta razón, es importante que el grado de exactitud de la solución mínimo requerido sea conocido, para evitar así cálculos innecesarios.

3.2.3. Método de Coeficientes Indeterminados

Supongamos que se desea utilizar diferencia finita hacia atras para aproximar $F'(x)$ para un error de segundo orden. Por el método de coeficientes indeterminados utilizando $F(x)$, $F(x-h)$, $F(x-2h)$, escribimos,

$$F'(x) \approx \gamma_1 F(x) + \gamma_2 F(x-h) + \gamma_3 F(x-2h).$$

Podemos utilizar la Serie de Taylor en x para obtener un sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} \gamma_1 F(x) + \gamma_2 F(x-h) + \gamma_3 F(x-2h) &= \gamma_1 F(x) + \gamma_2 \left(F(x) - hF'(x) + \frac{h^2}{2} F''(x) - \frac{h^3}{6} F'''(x) \right) + \\ &\quad \gamma_3 \left(F(x) - 2hF'(x) + \frac{4h^2}{2} F''(x) - \frac{8h^3}{6} F'''(x) \right) + O(\max |\gamma_k| h^4) \end{aligned} \quad (14)$$

La combinación lineal debe de aproximar $F'(x)$. Por lo que escribimos

$$\begin{aligned} \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 &= 0 \\ -h\gamma_2 - 2h\gamma_3 &= 1 \\ h^2\gamma_2 + 2h^2\gamma_3 &= 0 \end{aligned}$$

Debido a que se esta buscando $F'(x)$, el renglón correspondiente a la primera derivada se iguala a 1.

Resolviendo el sistema obtenemos, $\gamma_1 = -\frac{3}{2h}$, $\gamma_2 = \frac{2}{h}$, $\gamma_3 = -\frac{1}{2h}$. Por lo tanto, obtenemos la formula para diferencia hacia atras con orden de $O(h^2)$,

$$F'(x) = \frac{3}{2h} F(x) - \frac{2}{h} F(x-h) + \frac{1}{2h} F(x-2h) + O(h^2) \quad (15)$$

escrito de otra forma,

$$F'(x) = \frac{F(x-2h) - 4F(x-h) + 3F(x)}{2h} + O(h^2) \quad (16)$$

3.2.4. Resumen del uso de la Serie de Taylor:

- La Serie de Taylor y el Método de Diferencias Finitas asumen que la función a ser resuelta varía de forma continua (no existen discontinuidades).

- Es posible construir fórmulas para diferencia hacia adelante, hacia atrás, y centrada a partir de la Serie de Taylor.

- Es posible incrementar el orden de la exactitud de dichas formulas, y obtener aproximaciones de derivadas de cualquier grado al combinar distintas series de Taylor desarrolladas con diferentes numeros de puntos.

3.3. Solución de las Ecuaciones de Diferencia (Paso 3)

Se desea resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \sin(x^2)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$, ver Fig.(6).

Siguiendo el Paso 1 del procedimiento, la región de solución es discretizada, el intervalo continuo $[0, 2\pi]$ se convierte en un vector $\{x_i\}$ de $\{n+1\}$ valores (o puntos en la malla), desde 0 hasta 2π .

A su vez, la ecuación diferencial en forma continua,

$$\frac{dy}{dx} = \sin(x)^2$$

pasa a la forma discreta,

$$[A_{i,j}] \{y_i\} = \{\sin(x_i)^2\} \quad (17)$$

donde,

$[A_{i,j}]$: Matriz de diferenciación de $[(n+1) \times (n+1)]$ valores, forma discreta del operador continuo $\frac{d}{dx}$.

$\{y_i\}$: Solución de la ecuación diferencial en forma discreta, vector de $\{n+1\}$ valores.

$\{\sin(x_i)^2\}$: Información del problema, vector de $\{n+1\}$ valores. e $i, j = 1, 2, 3, \dots, n+1$.

El segundo paso consiste en la Aproximación de la Ecuación Diferencial, por lo tanto se selecciona el tipo de formula de diferencia finita que se utilizará para resolver el problema. En este caso se selecciona la formula de diferencia hacia adelante para la primera derivada con $O(h^2)$,

$$F'(x) = \frac{-F(x+2h) + 4F(x+h) - 3F(x)}{2h} + O(h^2)$$

esta se aplica a cada uno de los puntos de la malla, formando así un sistema de $n+1$ ecuaciones simultaneas (una ecuación por cada punto),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h} (-3y_1 + 4y_2 - y_3 + 0 + 0 + \dots + 0) &= \sin(x_1)^2 \\ \frac{1}{2h} (0 - 3y_2 + 4y_3 - y_4 + 0 + \dots + 0) &= \sin(x_2)^2 \\ \frac{1}{2h} (0 + 0 + -3y_3 + 4y_4 - y_5 + \dots + 0) &= \sin(x_3)^2 \\ \dots &= \dots \\ \frac{1}{2h} (0 + \dots + 0 + 0 + -3y_{n-1} + 4y_n - y_{n+1}) &= \sin(x_{n-1})^2 \\ \frac{1}{2h} (0 + \dots + 0 + y_{n-2} - 4y_{n-1} + 3y_n + 0) &= \sin(x_n)^2 \\ \frac{1}{2h} (0 + \dots + 0 + 0 + y_{n-1} - 4y_n + 3y_{n+1}) &= \sin(x_{n+1})^2 \end{aligned}$$

Este sistema puede escribirse en la forma $[A_{i,j}] \{y_i\} = \{\sin(x_i)^2\}$,

$$1/2h \begin{bmatrix} -3 + 4 - 1 + 0 + 0 + \dots + 0 \\ 0 - 3 + 4 - 1 + 0 + \dots + 0 \\ 0 + 0 - 3 + 4 - 1 + \dots + 0 \\ \dots \\ 0 + \dots + 0 + 0 - 3 + 4 - 1 \\ 0 + \dots + 0 + 1 - 4 + 3 + 0 \\ 0 + \dots + 0 + 0 + 1 - 4 + 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_{n-1} \\ y_n \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(x_1)^2 \\ \sin(x_2)^2 \\ \sin(x_3)^2 \\ \dots \\ \sin(x_{n-1})^2 \\ \sin(x_n)^2 \\ \sin(x_{n+1})^2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Por lo que para encontrar el vector solución $\{y_i\}$, se despeja la ecuación, y obtenemos,

$$\{y_i\} = [A_{i,j}]^{-1} \{\sin(x_i)^2\} \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_{n-1} \\ y_n \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = 1/2h \begin{bmatrix} -3 + 4 - 1 + 0 + 0 + \dots + 0 \\ 0 - 3 + 4 - 1 + 0 + \dots + 0 \\ 0 + 0 - 3 + 4 - 1 + \dots + 0 \\ \dots \\ 0 + \dots + 0 + 0 - 3 + 4 - 1 \\ 0 + \dots + 0 + 1 - 4 + 3 + 0 \\ 0 + \dots + 0 + 0 + 1 - 4 + 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sin(x_1)^2 \\ \sin(x_2)^2 \\ \sin(x_3)^2 \\ \dots \\ \sin(x_{n-1})^2 \\ \sin(x_n)^2 \\ \sin(x_{n+1})^2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

La matriz de diferenciación $[A_{i,j}]$ es una matriz singular, al aplicar las condiciones de frontera,

$$y(2\pi) = 0 \quad (21)$$

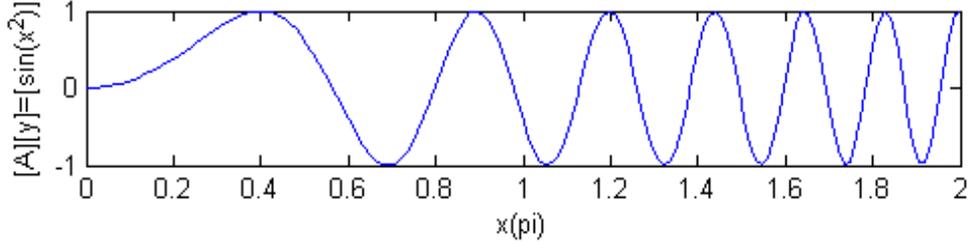


Figura 6: Gráfica de la Ecuación $[A_{i,j}] \{y_i\} = \{\sin(x_i)^2\}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

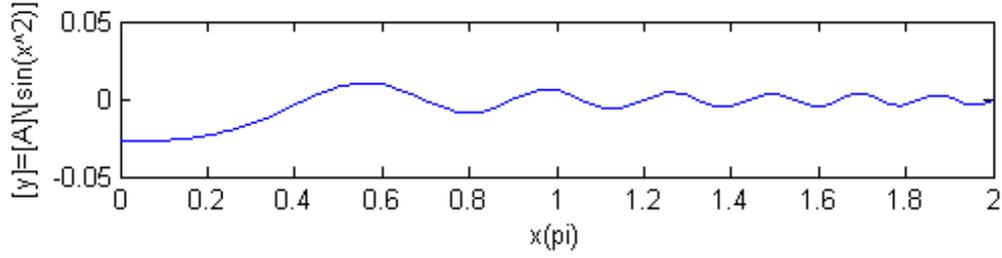


Figura 7: Gráfica de $\{y_i\} = [A_{i,j}]^{-1} \{\sin(x_i)^2\}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

la singularidad se elimina de la forma,

$$\{y_i\} = [A_{i,j}]^{-1} \{\sin(x_i)^2\} - \{A_{i, N+1} y_{N+1}\} \quad i = 1 \dots N, \quad j = 1 \dots N \quad (22)$$

donde,

$$\{y_{N+1}\} = \{0\}$$

Una vez realizada la operación, se obtiene un vector desde y_1 hasta y_{N+1} el cual es la solución numérica de la ecuación diferencial (ver Fig.(7).

y su solución numérica, la Ec.(19),

3.3.1. Técnica para la construcción de Matrices de Diferenciación.

Es importante recalcar que la matriz de diferenciación $[A_{i,j}]$ es independiente de la función que se desea resolver.

La matriz de diferenciación $[A_{i,j}]$, puede utilizarse tanto para obtener la derivada, $\{b_i\}$, de una función cualquiera $\{u_i\}$,

$$[A_{i,j}] \{u_i\} = \{b_i\} \quad (23)$$

o como para resolver una ecuación diferencial, y obtener la función $\{u\}$,

$$\{u_i\} = [A_{i,j}]^{-1} \{b_i\} \quad (24)$$

A continuación se muestran un par de ejemplos de matrices de diferenciación,

a) $n + 1 = 6$,

$$F'(x) = \frac{-F(x+2h) + 4F(x+h) - 3F(x)}{2h} + O(h^2) \implies A = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

b) $n + 1 = 8$,

$$F''(x) = \frac{2F(x) - 5F(x-h) + 4F(x-2h) - F(x-3h)}{h^2} + O(h^2) \implies A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Las siguientes tablas pueden ser utilizadas como guía en la construcción de algunas matrices de diferenciación.

Tipo:	Adelante		$F(x)$	$F_{(x+1)}$	$F_{(x+2)}$	$F_{(x+3)}$	$F_{(x+4)}$	$F_{(x+5)}$	$F_{(x+6)}$	$F_{(x+7)}$
Primera	$O(h)$	$(1/h) \times$	-1	1	0	0	0	0	0	0
Primera	$O(h^2)$	$(1/2h) \times$	-3	4	-1	0	0	0	0	0
Primera	$O(h^3)$	$(1/6h) \times$	-11	18	-9	2	0	0	0	0
Primera	$O(h^4)$	$(1/12h) \times$	-25	48	-36	16	-3	0	0	0
Segunda	$O(h^2)$	$(1/h^2) \times$	2	-5	4	-1	0	0	0	0
Segunda	$O(h^3)$	$(1/12h^2) \times$	35	-104	114	-56	11	0	0	0
Segunda	$O(h^4)$	$(1/12h^2) \times$	45	-154	214	-156	61	-10	0	0
Tercera	$O(h^3)$	$(1/4h^3) \times$	-17	71	-118	98	-41	7	0	0
Tercera	$O(h^4)$	$(1/8h^3) \times$	-49	232	-461	496	-307	104	-15	0
Cuarta	$O(h^4)$	$(1/6h^4) \times$	56	-333	852	-1219	1056	-555	164	-21

Cuando se construye el sistema de ecuaciones, y consecuentemente, al obtener la matriz de diferenciación, en el caso de **diferencia hacia adelante**,

1a) Se aplica la formula de diferencia hacia adelante desde el primer punto, y_1 , hasta el nodo $y_{(n+1)-|k_{\text{máx}}|}$, donde $n + 1$ es igual al numero de puntos de la malla, y donde $|k_{\text{máx}}|$ es el numero de incremento máximo que contiene la formula de diferencia finita que se está utilizando, por ejemplo, para el caso de diferencia finita hacia adelante con orden de error $O(h^2)$,

$$F'(x) = \frac{-F(x + 2h) + 4F(x + h) - 3F(x)}{2h} + O(h^2)$$

el valor correspondiente a $|k_{\text{máx}}|$ sería $k = 2$, tomado del término $-F(x + 2h)$.

2a) Para completar la matriz, desde el punto $y_{(n+1)-(|k_{\text{máx}}|)+1}$ hasta el punto y_{n+1} se utiliza la formula de diferencia hacia atras, con el mismo orden de error.

Tipo:	Atras									
Derivada	Error		$F_{(x-7)}$	$F_{(x-6)}$	$F_{(x-5)}$	$F_{(x-4)}$	$F_{(x-3)}$	$F_{(x-2)}$	$F_{(x-1)}$	$F_{(x)}$
Primera	$O(h)$	$(1/h) \times$	0	0	0	0	0	0	-1	1
Primera	$O(h^2)$	$(1/2h) \times$	0	0	0	0	0	1	-4	3
Primera	$O(h^3)$	$(1/6h) \times$	0	0	0	0	-2	9	-18	11
Primera	$O(h^4)$	$(1/12h) \times$	0	0	0	3	-16	36	-48	25
Segunda	$O(h^2)$	$(1/h^2) \times$	0	0	0	0	-1	4	-5	2
Segunda	$O(h^3)$	$(1/12h^2) \times$	0	0	0	11	-56	114	-104	35
Segunda	$O(h^4)$	$(1/12h^2) \times$	0	0	-10	61	-156	214	-154	45
Tercera	$O(h^3)$	$(1/4h^3) \times$	0	0	-7	41	-98	118	-71	17
Tercera	$O(h^4)$	$(1/8h^3) \times$	0	15	-104	307	-496	461	-232	49
Cuarta	$O(h^4)$	$(1/6h^4) \times$	-21	164	-555	1056	-1219	852	-333	56

Si se desea utilizar **diferencia hacia atras**,

- 1b) Se aplica diferencia hacia adelante al inicio de la malla, desde el punto y_1 hasta el punto $y_{(|k \text{ máx}|)}$, y
- 2b) Se utiliza diferencia hacia atras desde el nodo $y_{(|i \text{ máx}|+1)}$ hasta el nodo y_{n+1} .

Tipo:	Centrada								
Derivada	Error		$F_{(x-3)}$	$F_{(x-2)}$	$F_{(x-1)}$	$F_{(x)}$	$F_{(x+1)}$	$F_{(x+2)}$	$F_{(x+3)}$
Primera	h^2	$(1/2h) \times$	0	0	-1	0	1	0	0
Segunda	h^2	$(1/h^2) \times$	0	0	-1	2	-1	0	0
Segunda	h^4	$(1/12h^2) \times$	0	-1	16	-30	16	-1	0

Finalmente, para el caso de **diferencia centrada**, se utilizan las dos técnicas anteriores para completar la matriz de diferenciación.

- 1c) Se utiliza diferencia hacia adelante desde el punto y_1 hasta el punto $y_{(|k \text{ máx}|)}$.
- 2c) Desde el nodo $y_{(|k \text{ máx}|+1)}$ hasta el nodo $y_{(n+1)-|k \text{ máx}|}$ se utiliza diferencia centrada.
- 3c) Finalmente desde el punto $y_{(n+1)-(|k \text{ máx}|+1)}$ hasta el punto y_{n+1} se usa la formula de diferencia hacia atras.

Es importante recordar que para obtener el mayor grado de aproximación posible, todas las ecuaciones involucradas en la generación de la matriz de diferenciación deben ser del mismo orden de error.

3.3.2. Resumen fórmulas de diferencias finitas para aproximaciones de diferentes derivadas con diferentes órdenes de error.

A continuación se presenta un resumen de varias fórmulas de diferencias finitas, para aproximar derivadas con diferentes órdenes de erro.

Aproximación de la Primera Derivada:

Error de Primer Orden:

Hacia adelante:

$$F'(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} + O(h) \quad (25)$$

Hacia atras:

$$F'(x) = \frac{F(x) - F(x-h)}{h} + O(h) \quad (26)$$

Error de Segundo Orden:

Hacia adelante:

$$F'(x) = \frac{-F(x+2h) + 4F(x+h) - 3F(x)}{2h} + O(h^2) \quad (27)$$

Hacia atras:

$$F'(x) = \frac{F(x-2h) - 4F(x-h) + 3F(x)}{2h} + O(h^2) \quad (28)$$

Centrada:

$$F'(x) = \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} + O(h^2) \quad (29)$$

Error de Tercer Orden:

Hacia adelante:

$$F'(x) = \frac{2F(x+3h) - 9F(x+2h) + 18F(x+h) - 11F(x)}{6h} + O(h^3) \quad (30)$$

Hacia atras:

$$F'(x) = \frac{11F(x) - 18F(x-h) + 9F(x-2h) - 2F(x-3h)}{6h} + O(h^3) \quad (31)$$

Error de Cuarto Orden:

Hacia adelante:

$$F'(x) = \frac{-3F(x+4h) + 16F(x+3h) - 36F(x+2h) + 48F(x+h) - 25F(x)}{12h} + O(h^4) \quad (32)$$

Hacia atras:

$$F'(x) = \frac{25F(x) - 48F(x-h) + 36F(x-2h) - 16F(x-3h) + 3F(x-4h)}{12h} + O(h^4) \quad (33)$$

Aproximación de la Segunda Derivada:

Error de Segundo Orden:

Hacia adelante:

$$F''(x) = \frac{-F(x+3h) + 4F(x+2h) - 5F(x+h) + 2F(x)}{h^2} + O(h^2) \quad (34)$$

Hacia atras:

$$F''(x) = \frac{2F(x) - 5F(x-h) + 4F(x-2h) - F(x-3h)}{h^2} + O(h^2) \quad (35)$$

Centrada:

$$F''(x) = \frac{F(x-h) - 2F(x) + F(x+h)}{h^2} + O(h^2) \quad (36)$$

Error de Tercer Orden:

Hacia adelante:

$$F''(x) = \frac{11F(x+4h) - 56F(x+3h) + 114F(x+2h) - 104F(x+h) + 35F(x)}{12h^2} + O(h^3) \quad (37)$$

Hacia atras:

$$F''(x) = \frac{35F(x) - 104F(x-h) + 114F(x-2h) - 56F(x-3h) + 11F(x-4h)}{12h^2} + O(h^3) \quad (38)$$

Error de Cuarto Orden:

Hacia adelante:

$$F''(x) = \frac{-10F(x+5h) + 61F(x+4h) - 156F(x+3h) + 214F(x+2h) - 154F(x+h) + 45F(x)}{12h^2} + O(h^4) \quad (39)$$

Hacia atras:

$$F''(x) = \frac{45F(x) - 154F(x-h) + 214F(x-2h) - 156F(x-3h) + 61F(x-4h) - 10F(x-5h)}{12h^2} + O(h^4) \quad (40)$$

Centrada:

$$F''(x) = \frac{-F(x-2h) + 16F(x-h) - 30F(x) + 16F(x+h) - F(x+2h)}{12h^2} + O(h^4) \quad (41)$$

Aproximación de la Tercera Derivada:

Error de Tercer Orden:

Hacia adelante:

$$F^{(3)}(x) = \frac{7F(x+5h) - 41F(x+4h) + 98F(x+3h) - 118F(x+2h) + 71F(x+h) - 17F(x)}{4h^3} + O(h^3) \quad (42)$$

Hacia atras:

$$F^{(3)}(x) = \frac{17F(x) - 71F(x-h) + 118F(x-2h) - 98F(x-3h) + 41F(x-4) - 7F(x-5)}{4h^3} + O(h^3) \quad (43)$$

Error de Cuarto Orden:

Hacia adelante:

$$F^{(3)}(x) = \left(\frac{1}{8h^3}\right) [-15F(x+6h) + 104F(x+5h) - 307F(x+4h) + 496F(x+3h) - 461F(x+2h) + 232F(x+h) - 49F(x)] + O(h^4) \quad (44)$$

Hacia atras:

$$F^{(3)}(x) = \left(\frac{1}{8h^3}\right) [49F(x) - 232F(x-h) + 461F(x-2h) - 496F(x-3h) + 307F(x-4h) - 104F(x-5h) + 15F(x-6h)] + O(h^4) \quad (45)$$

Aproximación de la Cuarta Derivada:

Error de Cuarto Orden:

Hacia adelante:

$$F^{(4)}(x) = \left(\frac{1}{6h^4}\right) [-21F(x+7h) + 164F(x+6h) - 555F(x+5h) + 1056F(x+4h) - 1219F(x+3h) + 852F(x+2h) - 333F(x+h) + 56F(x)] + O(h^4) \quad (46)$$

Hacia atras:

$$F^{(4)}(x) = \left(\frac{1}{6h^4}\right) [56F(x) - 333F(x-h) + 852F(x-2h) - 1219F(x-3h) + 1056F(x-4h) - 555F(x-5h) + 164F(x+6h) - 21F(x-7h)] + O(h^4) \quad (47)$$

$$F^{(4)}(x) = \left(\frac{1}{6h^4}\right) [56F(x) - 333F(x-h) + 852F(x-2h) - 1219F(x-3h) + 1056F(x-4h) - 555F(x-5h) + 164F(x+6h) - 21F(x-7h)] + O(h^4) \quad (48)$$

Referencias

- [1] M. N. Sadiku. *Numerical Techniques in Electromagnetics*. CRC Press, 2001.
- [2] L. N. Trefethen. *Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equations*. No publicado, disponible en <http://web.comlab.ox.ac.uk/oucl/work/nick.trefethen/pdtext.html>, 1996.
- [3] J. W. Thomas. *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. Number 22 in Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1995.